

Perbandingan perhitungan geoid Pulau Jawa dengan integral Stokes dan integral Hotine

L. M. Sabri¹, Leni Sophia Heliani², T. Aris Sunantyo², Nurrohmat Widjajanti²

¹Program Studi Doktor Ilmu Teknik Geomatika
Departemen Teknik Geodesi
Program Pascasarjana Fakultas Teknik Universitas Gadjahmada

²Departemen Teknik Geodesi
Fakultas Teknik Universitas Gadjahmada

Abstrak

Salah satu komponen dalam pemecahan *Boundary Value Problem* adalah perhitungan integral Stokes dan integral Hotine. Integral Stokes memerlukan data anomali gayaberat di geoid, sementara integral Hotine memerlukan data gangguan gayaberat di permukaan maupun di geoid. Penelitian ini bertujuan untuk menguji ketelitian geoid Pulau Jawa yang dihitung dengan integral Stokes dan integral Hotine. Data yang digunakan adalah data anomali gayaberat *Free Air* sebagai komponen gelombang menengah, EGM2008 sebagai komponen gelombang panjang, dan SRTM90 sebagai komponen gelombang pendek. Pada perhitungan integral Hotine, data anomali gayaberat *Free Air* dikonversi terlebih dahulu menjadi data gangguan gayaberat menggunakan data undulasi geoid dari EGM2008. Perhitungan geoid menerapkan prinsip *Remove-Compute-Restore* pada perangkat lunak GRAVSOF 2.9.7 dan *Simply FORTRAN 2*. Geoid gravimetrik diuji terhadap geoid geometrik di 30 titik di Kota Semarang. Rerata simpangan geoid integral Stokes dan Hotine secara berturut-turut adalah -0,701 m dan -0,717 m, sementara simpangan bakunya adalah $\pm 0,063$ m dan $\pm 0,049$ m. Simpangan baku geoid integral Stokes yang lebih besar daripada geoid integral Hotine dikontribusi oleh kesalahan yang terjadi pada koreksi topografi. Berdasarkan statistik pengujian disimpulkan bahwa perhitungan integral Hotine dengan data gangguan gayaberat tanpa koreksi topografi dapat menghasilkan geoid gravimetri yang presisi.

Kata kunci: Geoid, integral Stokes, integral Hotine, *Remove-Compute-Restore*

Pendahuluan

Sebelum era GNSS, geoid gravimetrik umumnya dihitung dengan pendekatan Stokes dan Molodensky (Kirby, 2003). Pendekatan Stokes membutuhkan informasi densitas masa di bawah permukaan bumi. Pendekatan Molodensky tidak membutuhkan data densitas, sehingga model ekuipotensialnya lebih dikenal sebagai quasi-geoid. Pengembangan pendekatan Stokes di University of New Brunswick (UNB) dikompilasi dalam perangkat lunak SHGeo UNB. Adapun pendekatan Molodensky

dikembangkan oleh DTU dan dikompilasi dalam bentuk perangkat lunak GRAVSOF. Pengembangan pendekatan Molodensky oleh *Kungliga Tekniska Högskolan* dikenal sebagai metode KTH (Abdalla, 2009). Pendekatan Stokes dan Molodensky sama-sama menggunakan integral Stokes dalam perhitungan geoid, namun kedua pendekatan tersebut berbeda dalam hal koreksi topografi terhadap data gayaberat.

Proses perhitungan integral Stokes dalam GRAVSOF dapat menggunakan *Fast Fourier Transform* (FFT) dan *Least Squares Collocation*

(LSC). Pengujian pada titik-titik pengukuran gayaberat menunjukkan besarnya presisi geoid yang dihitung dengan FFT dan LSC secara berturut-turut adalah $\pm 2,7$ cm dan $\pm 2,2$ cm (Abd-Elmotaal, 2011). Adapun pengujian pada titik-titik yang berada di luar lokasi pengukuran gayaberat menghasilkan geoid FFT dan LSC dengan presisi sebesar $\pm 1,100$ m dan $\pm 1,780$ m.

Pembuatan geoid gravimetrik yang dikontribusi EGM2008 menggunakan pendekatan Molodensky di Yogyakarta yang diuji dengan geoid geometrik di delapan TTG memiliki presisi $\pm 0,127$ m (Triarahmadhana dkk, 2014). Penerapan pendekatan Molodensky untuk pembuatan geoid Indonesia yang dikontribusi oleh EGM2008 yang diuji pada 14 titik Jaring Kontrol Vertikal Nasional (JKVN) orde 1 di Pulau Jawa memberikan presisi $\pm 0,450$ m (Kasenda, 2009).

Pendekatan Stokes memerlukan data tinggi ortometrik untuk mereduksi gayaberat dari permukaan bumi ke geoid (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Pendekatan Molodensky memerlukan data tinggi normal untuk mereduksi gayaberat dari elipsoid ke telluroid. Pengukuran tinggi fisik dengan sipat datar untuk reduksi gayaberat di setiap titik pengukuran pada wilayah yang luas memerlukan waktu pengukuran yang panjang dan biaya yang cukup besar.

Salah satu cara untuk menghindari pengukuran tinggi fisik dengan sipat datar dalam perhitungan geoid adalah dengan integral Hotine (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Pendekatan Hotine memerlukan data gangguan gayaberat atau *gravity disturbance* yang merupakan selisih dari nilai gayaberat aktual terhadap nilai gayaberat normal pada ketinggian tertentu dari elipsoid referensi. Geoid Australia Barat yang dimodelkan dari 60 data gangguan gayaberat memiliki bentuk yang serupa dengan geoid yang dimodelkan dari data anomali gayaberat *Free Air* dengan jumlah data yang lebih banyak dan merata (Kirby, 2003). Model geoid Australia Barat yang dihitung dengan integral Stokes menyimpang sebesar $\pm 0,165$ m, sementara simpangan baku hasil hitungan integral Hotine sebesar $\pm 0,267$ m.

Fei dkk (2005) menerapkan BVP GPS untuk menghitung geoid gravimetrik seluas 40 km x 30 km di China. Data pada proses *remove-*

compute-restore adalah data gangguan gayaberat di 702 lokasi dan EGM96 $n=360$, sementara reduksi topografi diabaikan. Data gangguan gayaberat residu diinterpolasi dengan ukuran $0,5' \times 0,5'$. Pengukuran GNSS dan sipat datar presisi dilakukan pada 52 titik untuk keperluan validasi dan *fitting*. Proses *fitting* geoid gravimetrik dilakukan dengan dua cara, yaitu *fitting* terhadap geoid geometrik di 29 titik, dan *fitting* terhadap geoid gravimetrik yang dihitung di 52 titik ukuran GNSS dan sipat datar. Pengujian geoid hasil teknik *fitting* pertama pada 23 lokasi menghasilkan presisi sebesar $\pm 0,024$ m. Pengujian geoid hasil teknik *fitting* kedua pada 52 lokasi menghasilkan presisi sebesar $\pm 0,048$ m.

Chan-Fang dkk (2011) mengaplikasikan metode Bjerhammer untuk memecahkan BVP GPS dengan data GNSS dan gayaberat yang diukur di 4870 lokasi di Cina. Validasi pada 65 titik menghasilkan simpangan baku sebesar $\pm 0,024$ m. Setelah dilakukan proses pengepasan atau *fitting* dengan *quadratic polynomial*, presisi geoid meningkat menjadi $\pm 0,014$ m.

Teori

Geoid adalah salah satu bidang ekuipotensial gayaberat aktual yang secara global berhimpit dengan muka laut rata-rata tanpa gangguan (Hofmann-Wellenhof dan Moritz, 2005). Untuk keperluan matematis, bentuk geoid yang tidak beraturan didekati dengan elipsoid putar sebagai bidang ekuipotensial gayaberat normal yang besarnya sama dengan potensial gayaberat aktual di geoid. Potensial gayaberat aktual (W) setiap titik di geoid adalah sama yang dirumuskan dengan persamaan (2.1).

$$W = W_0 \quad (2.1)$$

dalam hal ini W_0 adalah potensial gayaberat aktual di geoid.

Potensial gayaberat normal (U) setiap titik di elipsoid adalah sama yang dirumuskan dengan persamaan (2.2).

$$U = U_0 \quad (2.2)$$

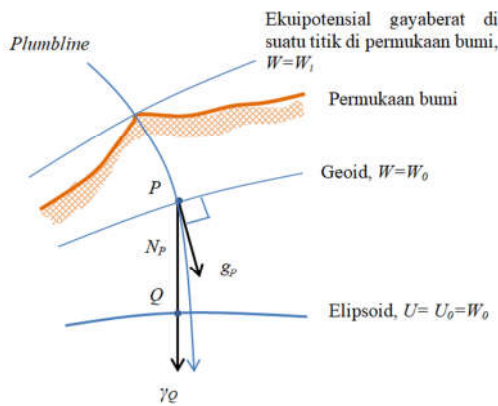
dalam hal ini U_0 adalah potensial gayaberat normal di geoid. Berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.2) didapatkan hubungan antara potensial gayaberat normal titik di elipsoid dengan geoid, seperti pada persamaan (2.3).

$$U = U_0 = W_0 \quad (2.3)$$

Geoid dan ellipsoid tidak berhimpit secara tepat. Geoid di Pulau Jawa berada di atas ellipsoid, sementara geoid di bagian barat Pulau Sumatera berada di bawah ellipsoid (Kahar, 2008). Secara geometrik, hubungan antara geoid dan ellipsoid dapat dilihat pada Gambar 2.1. Potensial gayaberat normal di ellipsoid (U_Q) sama dengan potensial gayaberat di geoid (W_P). Potensial gayaberat normal di titik P dapat dihitung dengan deret Taylor, seperti pada persamaan (2.4).

$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial h} \right)_Q \cdot N_P \quad (2.4)$$

dalam hal ini N_P adalah undulasi geoid.



Gambar Error! No text of specified style in document..1 Undulasi geoid di titik P

Undulasi geoid yang menyatakan hubungan geometrik antara geoid dan ellipsoid dapat dihitung secara gravimetrik maupun secara geometrik. Secara gravimetrik, undulasi geoid dihitung dengan menggunakan formula Bruns pada persamaan (2.5).

$$N_P = \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad (2.5)$$

dalam hal ini T_P adalah anomali potensial yang dihitung dari data ukuran gayaberat. Secara geometrik, undulasi geoid dihitung selisih ketinggian titik di permukaan bumi yang diukur terhadap ellipsoid terhadap ketinggian dengan referensi geoid, seperti pada persamaan berikut (2.6).

$$N_P = h_p - H_P \quad (2.6)$$

Model bumi normal yang berbentuk ellipsoid merupakan bentuk matematis yang dibuat sedekat mungkin dengan bentuk geoid. Potensial gayaberat aktual di geoid sama dengan potensial gayaberat normal di ellipsoid. Bentuk bumi yang tidak beraturan mengakibatkan terjadi perbedaan antara besaran-besaran pada model bumi normal dan model bumi aktual. Perbedaan antara potensial gayaberat aktual di permukaan bumi dan potensial gayaberat normal di permukaan bumi disebut dengan istilah *potential disturbance* atau gangguan potensial (T) yang dirumuskan dengan persamaan (2.7).

$$T = W - U \quad (2.7)$$

Perbedaan antara gayaberat aktual di permukaan bumi dan gayaberat normal di permukaan bumi disebut dengan istilah *gravity disturbance* atau gangguan gayaberat (δg) yang dirumuskan dengan persamaan (2.8).

$$\delta g = g_P - \gamma_P \quad (2.8)$$

Perbedaan antara gayaberat aktual di geoid dan gayaberat normal di ellipsoid disebut dengan istilah *gravity anomaly* atau anomali gayaberat (Δg) yang dirumuskan dengan persamaan (2.9).

$$\Delta g = g_Q - \gamma \quad (2.9)$$

Penentuan gravitasi bumi berdasarkan pengetahuan tentang potensial pada batas tanpa mengetahui densitas dikenal dengan istilah *Boundary Value Problem* (BVP). BVP yang dikenal dalam teori potensial (Jekeli, 2007), yaitu *Dirichlect problem* atau BVP pertama, *Neumann problem* atau BVP kedua, dan *Robin problem* atau BVP ketiga. BVP pertama adalah memecahkan potensial di luar batas berdasarkan nilai potensial di batas. BVP ketiga adalah memecahkan potensial di luar batas berdasarkan kombinasi nilai potensial dan turunan pertama potensial di batas.

Turunan pertama anomali potensial adalah gangguan gayaberat (Jekeli 2007), seperti pada persamaan (2.10).

$$\delta g(r, \theta, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial r} T(r, \theta, \lambda) \quad (2.10)$$

Anomali potensial dapat dirumuskan kembali dengan menerapkan *convolution theorem* pada persamaan (2.11)

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g(r, \theta', \lambda') \cdot H(\psi, r) d\sigma \quad (2.11)$$

Pada permukaan bola ($r=R$), persamaan (2.11) dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi Hotine, seperti pada persamaan (2.12)

$$H(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - \ln \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right) \quad (2.12)$$

Pemecahan Neumann *problem* cukup sulit, karena data gangguan gayaberat harus terdefinisi di permukaan geoid, sementara pengukuran gayaberat dilakukan di permukaan bumi. Masalah nilai batas (S) yang berupa permukaan bumi pada *GPS Boundary Value Problem* sudah terpecahkan melalui pengukuran GNSS. Data geometri dari GNSS tersebut dan data pengukuran gayaberat di permukaan bumi selanjutnya digunakan untuk menghitung gangguan potensial (Hofmann-Wellenhof dan Moritz, 2006).

Kombinasi potensial dan turunan pertama potensial dapat ditemui pada hubungan antara anomali gayaberat dengan anomali potensial, seperti dirumuskan pada persamaan (2.13).

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \left(-\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) T(r, \theta, \lambda) \quad (2.13)$$

Anomali potensial dapat dirumuskan kembali dengan menerapkan *convolution theorem* seperti tampak pada persamaan (2.14).

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g(r, \theta', \lambda') \cdot S(\psi, r) d\sigma \quad (2.14)$$

Pada permukaan bola ($r = R$) atau bidang ekuipotensial, fungsi Stokes dirumuskan dengan persamaan (2.15)

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} + 1 - 6 \cdot \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cdot \cos \psi - 3 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (2.15)$$

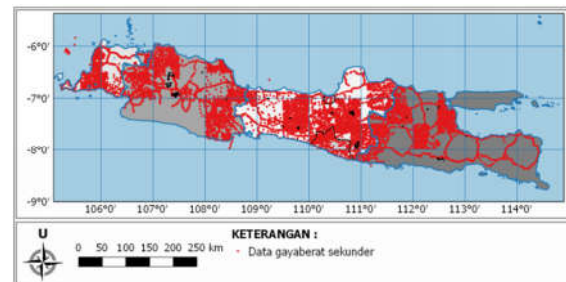
BVP Molodensky adalah masalah pemecahan batas (S) yang berupa permukaan bumi berdasarkan data gayaberat dan potensial di permukaan bumi (Hofmann-Wellenhof dan Moritz, 2005). Integral Stokes dan rumus-rumus lainnya mengasumsikan gangguan potensial bersifat harmonik di geoid. Asumsi ini mengakibatkan massa di atas batas tersebut

harus dihilangkan dengan informasi densitas massa di titik pengukuran. Penggunaan densitas massa yang tidak akurat mengakibatkan kesalahan pada perhitungan geoid.

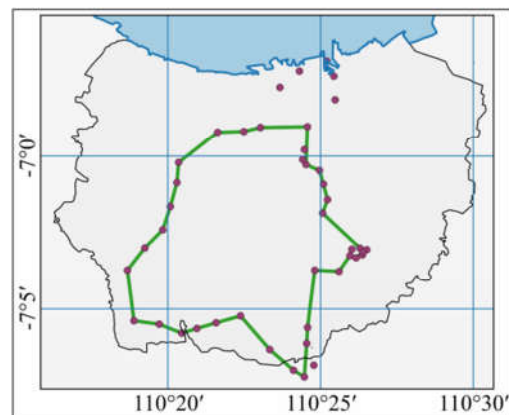
Salah satu pendekatan yang dapat meminimalkan kesalahan akibat informasi densitas massa adalah pendekatan Molodensky. Pendekatan ini bertujuan untuk mendapatkan anomali tinggi berdasarkan anomali gayaberat di permukaan bumi. Anomali gayaberat merupakan selisih antara gayaberat aktual di permukaan bumi dengan gayaberat normal di telluroid.

Metode penelitian

Data yang digunakan untuk perhitungan geoid gravimetrik adalah data anomali gayaberat Free Air Pulau Jawa, SRTM90, dan EGM2008 $n=2190$. Sebaran data gayaberat di Pulau Jawa dapat dilihat pada Gambar 1. Data yang digunakan dalam perhitungan geoid geometrik adalah data hasil pengukuran GNSS dengan metode statik dan data hasil ukuran sipat datar pada 30 titik di Kota Semarang, seperti tampak pada Gambar 2.



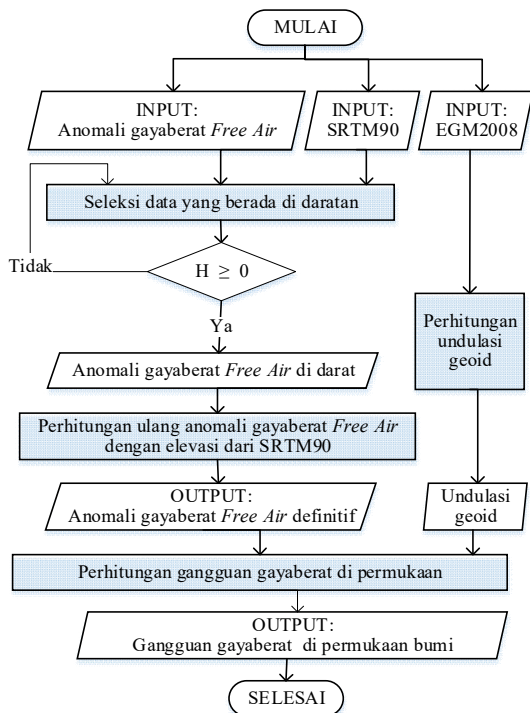
Gambar 1. Sebaran data anomali gayaberat Free Air di Pulau Jawa



Gambar 2. Sebaran titik dan jalur geoid geometrik di Kota Semarang

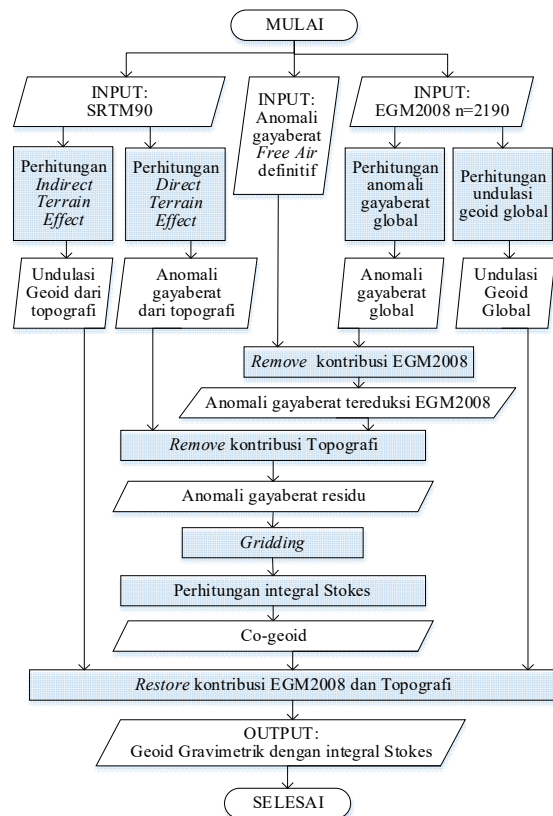
Geoid gravimetrik dihitung dengan script program **GRAVSOFT** dari DTU dalam bahasa pemrograman FORTRAN. Perhitungan dilakukan pada perangkat lunak **Simply FORTRAN**. Data geoid geometrik berbasis data ukuran GNSS TopCon Hiper Gb dan sipat datar Wild NAK2.

Data anomali gayaberat Free Air Pulau Jawa dikompilasi dari data ukuran primer dan data sekunder dari Pertamina serta beberapa instansi terkait (Triarahmadhana dan Heliani, 2014). Pada penelitian ini, nilai anomali gayaberat *Free Air* dihitung kembali dengan data elevasi dari SRTM90 dengan skema pada Gambar 3. Konversi data anomali gayaberat menjadi data gangguan gayaberat di permukaan bumi dihitung dengan data undulasi geoid global yang dihitung dari EGM2008 $n=2190$. *Upward continuation* nilai gayaberat normal di elipsoid menjadi nilai gayaberat di geoid menghasilkan nilai gangguan gayaberat di geoid.



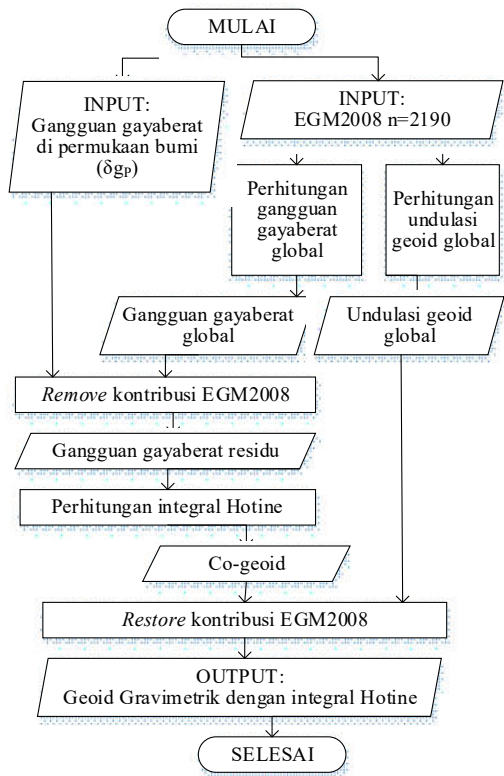
Gambar 3. Skema perhitungan data anomali gayaberat dan gangguan gayaberat

Perhitungan geoid berbasis data anomali gayaberat *Free Air* dengan pendekatan Molodensky dapat dilihat pada Gambar 4. Anomali gayaberat residu diperoleh dengan mereduksi anomali gayaberat *Free Air* aktual terhadap anomali gayaberat dari EGM2008 $N=2190$ dan efek topografi yang dihitung dengan *Residual Terrain Model* (RTM). Data anomali gayaberat residu tersebut lalu digunakan untuk menghitung co-geoid menggunakan rumus integral Stokes. Tahap akhir dari metode ini adalah pengembalian undulasi geoid global dan efek topografik pada data co-geoid sehingga diperoleh geoid gravimetrik definitif.



Gambar 4. Skema perhitungan geoid dengan integral Stokes

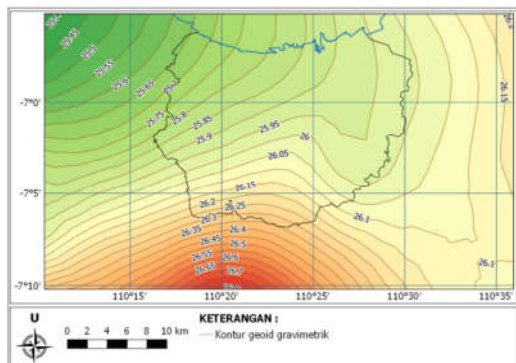
Perhitungan geoid berbasis data gangguan gayaberat dengan pendekatan Hotine dapat dilihat pada Gambar 5. Pada penelitian ini, data gangguan gayaberat hanya direduksi dengan data gangguan gayaberat dari EGM2008 $n=2190$ tanpa reduksi efek topografi.



Gambar 5. Skema perhitungan geoid dengan integral Hotine

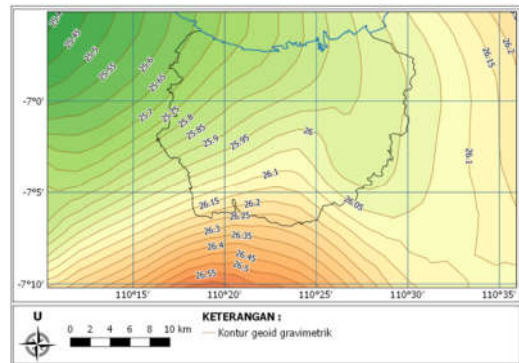
Hasil dan pembahasan

Hasil perhitungan integral Stokes di Kota Semarang dan sekitarnya dapat dilihat pada Gambar 6. Di Kota Semarang, geoid berbasis data anomali gayaberat *Free Air* berkisar antara 25,63 m hingga 26,35 m. Berdasarkan potongan pada garis meredian 110°25' BT, besarnya rentang undulasi geoid adalah sekitar 0,28 m yang bergradasi dari 25,87 m hingga 26,25 m.



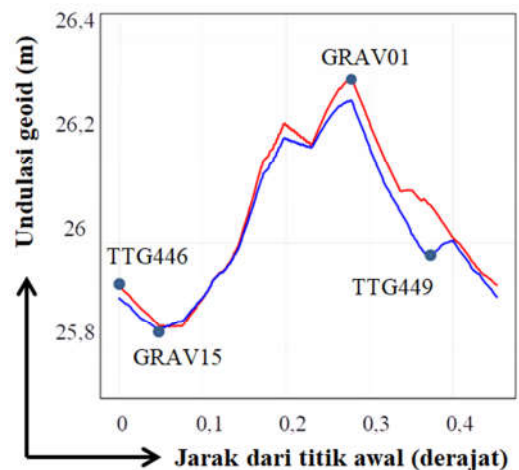
Gambar 6. Peta geoid dengan integral Stokes di Kota Semarang dan sekitarnya

Hasil perhitungan integral Hotine dengan data gangguan gayaberat dapat dilihat pada Gambar 7. Tanpa reduksi topografi, rentang undulasi geoid dengan integral Hotine relatif sama dengan geoid dari pendekatan Molodensky. Di Kota Semarang, geoid berbasis data gangguan gayaberat di permukaan bumi berkisar antara 25,64 m hingga 26,28 m.



Gambar 7. Peta geoid dengan integral Hotine di Kota Semarang dan sekitarnya

Profil geoid dengan integral Stokes dan integral Hotine divisualisasikan pada Gambar 8. Undulasi geoid maksimum terlihat pada titik GRAV01, sementara undulasi geoid minimum terlihat pada titik GRAV15. Perbedaan yang cukup signifikan antara profil geoid integral Stokes dan integral Hotine dapat dilihat pada titik TTG449.



Gambar 8. Profil geoid gravimetrik di jalur validasi di Kota Semarang

Hasil pengujian pada 30 titik validasi di Kota Semarang dapat dilihat pada Tabel 1. Perhitungan integral Stokes berbasis data anomali gayaberat dan perhitungan integral Hotine berbasis data gangguan gayaberat menghasilkan geoid dengan simpangan baku sebesar $\pm 0,063$ dan $\pm 0,049$ m. Presisi geoid integral Stokes yang lebih rendah daripada geoid integral Hotine dikontribusi oleh kesalahan yang ditimbulkan pada saat koreksi topografi.

Data anomali gayaberat Free Air pada penelitian ini juga telah digunakan sebelumnya oleh Triarahmadhana dan Heliani (2014) untuk menghitung undulasi geoid Pulau Jawa. Pengujian pada 49 titik di Kota Yogyakarta menunjukkan bahwa geoid yang dihitung dari anomali gayaberat Free Air, EGM2008 $n=2190$, dan SRTM30 Plus memiliki simpangan baku sebesar $\pm 0,585$ m (Triarahmadhana dan Heliani, 2014).

Tabel 1. Simpangan geoid dari data gayaberat sekunder

Simpangan	Geoid integral Stokes	Geoid integral Hotine
Nilai minimum (m)	-0,830	-0,832
Nilai maksimum (m)	-0,587	-0,642
Rentang (m)	0,243	0,190
Nilai rerata (m)	-0,701	-0,717
Simpangan baku (m)	$\pm 0,063$	0,049

Penutup

Pada pengujian di Kota Semarang, aplikasi integral Hotine dengan 10.085 data gangguan gayaberat di Pulau Jawa dapat menghasilkan geoid gravimetrik dengan presisi yang lebih baik daripada hasil hitungan dengan integral Stokes. Secara teknis, aplikasi integral Hotine dapat mempermudah proses perhitungan geoid, karena data gangguan gayaberat dapat dihitung dengan mereduksi data gayaberat terestris terhadap gayaberat normal di permukaan bumi. Perolehan data gayaberat normal di permukaan bumi lebih mudah daripada data gayaberat normal di geoid. Data gayaberat normal di permukaan bumi dihitung

dari data posisi geodetik yang diukur dengan GNSS yang presisi. Perhitungan data gayaberat normal di geoid dapat dihitung dari data posisi geodetik yang diukur dengan GNSS tipe navigasi dan ketinggian ortometrik dari ukuran sipat datar.

Ucapan Terimakasih

We would like to thank Prof. Rene Forsberg from DTU for providing GRAVSOF 2.9.7 and all the scripts.

Daftar Pustaka

- Abdalla, A. (2009). *Determination of a gravimetrik geoid model of Sudan using the KTH Method*. Tesis. Royal Institute of Technology(KTH), Stockholm, Swedia.
- Abd-Elmotaal, H. A. (2011). FFT versus Least-Squares Collocation Techniques for Gravimetrik Geoid Determination in Egypt. *Journal of Applied Geophysics*, Vol. 10, No. 1, hal.121-133.
- Chan-Fang, S., Fei, L., Li, M.-F., & Zhang, J. (2011). Determination of GPS/gravity quasi-geoid using Bjerhammar method. *Chinese Journal of Geophysics*.
- Fei, L., Jian-Li, Y., & Li-Ming, Z. (2005). Determination of Geoid by GPS/Gravity data. *Chinese Journal of Geophysics*, 326-330.
- Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Berlin. Springer.
- Kirby, J. F. (2003). On the Combination of Gravity Anomalies and Gravity Disturbances for Geoid Determination in Western Australia. *Journal of Geodesy*, Vol. 77, hal. 433-439.
- Triarahmadhana, B., Helliani, L. S., & Widjajanti, N. (2014). *Pembuatan Geoid Lokal D.I. Yogyakarta Sebagai Referensi Tinggi Survei Kadaster 3D*. Yogyakarta: Tesis. Universitas Gadjah Mada.
- Triarahmadhana, B., & Helliani, L. S. (2014). Evaluation of GOCE's Global Geopotential Model to the accuracy of local geoid. *FIG Congres 2014*.

